1ο φυλλάδιο ασκήσεων-Πραματική Ανάλυση
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Χρήστος Σαρόγλου

1. Έστω $\{x_n\}$ πραγματική ακολουθία. Να δειχθεί ότι

i) $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$

ii) $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$

iii) Αν $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\liminf \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq \liminf |x_n|^{1/n} \leq \limsup |x_n|^{1/n} \leq \limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}.$$

2. Έστω $G \subseteq \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $x + y \in G$ και $-x \in G$, $\forall x, y \in G$. Να δειχθεί ότι είτε G πυκνό στο $\mathbb{R}$ είτε υπάρχει $a \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $G = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$ (Υπόδειξη: Στη δεύτερη περίπτωση, $a = \inf(G \cap (0, \infty))$).

3. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, να βρεθούν όλα τα σημεία συσσώρευσης της ακολουθίας $\{\cos n\}$. (Υπόδειξη: Θέστε $G = \{n + 2\pi m : n, m \in \mathbb{Z}\}$)

4. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Να δειχθεί ότι

i) $A^o = \bigcup\{O : O$ ανοιχτό $\subseteq A\}$

ii) $(\overline{A})^c = (A^c)^o$ και $(A^o)^c = \overline{(A^c)}$.

5. Έστω $\{x_n\}$ μία ακολουθία από ένα μετρικό χώρο (X, d). Αν η $\{x_n\}$ συγκλίνει και το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένο, να δειχθεί ότι η $\{x_n\}$ είναι τελικά σταθερή, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x_n = x$, $\forall n \geq n_0$.

6. Έστω A, B υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d). Να δειχθούν τα εξής

i) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$

ii) $(A \cup B)^o \supseteq A^o \cup B^o$

iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

iv) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

v) Αν το B είναι ανοιχτό, τότε $\overline{A} \cap B \subseteq \overline{A \cap B}$

7. Δώστε παράδειγμα πλήρους μετρικού χώρου (X, d), για τον οποίο υπάρχουν $x \in X$ και $r > 0$, τέτοια ώστε να ισχύει $\overline{B(x, r)} \neq \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$. Τι ισχύει στον ευκλείδιο χώρο;

8. Να δειχθεί ότι το σύνορο ενός ανοιχτού ή κλειστού συνόλου A σε έναν μετρικό χώρο (X, d) είναι πουθενά πυκνό (δηλαδή $(\partial A)^o = \emptyset$). Ισχύει το ίδιο αν το A είναι τυχόν σύνολο;

9. Λέμε ότι μία οικογένεια συνόλων $\mathcal{F}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν οποιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους σύνολα από την $\mathcal{F}$ έχουν μη κενή τομή. Να δειχθεί ότι ένας μετρικός χώρος είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε οικογένεια κλειστών υποσυνόλων αυτού, η οποία έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, έχει μη κενή τομή.